数理解析研究所講究録 1256 巻 2002 年 25-37

$\mathbb{Z}_p$-拡大の非アーベル岩澤理論

島根大学　総合理工　尾崎 学 (Manabu Ozaki)
Department of Mathematics, Shimane Univ.

1. 序—動機

代数的整数論の最大の目標の一つはイデアル類群を理解することにある. 岩澤理論は現在このイデアル類群を理解する非常に有効な方法で, その特徴は, 有限次代数体のイデアル類群を理解するために, その体上の $\mathbb{Z}_p$-拡大と呼ばれる無限次拡大を考察するところにある. 類体論によればイデアル類群は最大不分岐アーベル拡大のガロワ群とも解釈されるから, 岩澤理論は代数体のアーベル拡大を理解する理論と言える. 言うまでもないが, 代数的整数論ではアーベル拡大のみならず非アーベル拡大 (特に分岐を制限した) も重要な対象である. この報告では岩澤理論的な手法 ("$\mathbb{Z}_p$-拡大の手法") で代数体の非アーベル拡大を研究することの 1 つの試みについて解説する.

その種の研究は従来から行われているので, いくつか挙げてみる:
例えば最も典型的な場合である円の p-分体 $k=\mathbb{Q}(\mu_p)$ (p は素数) 上の円分的 $\mathbb{Z}_p$-拡大 $k_\infty=\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty})$ に関して,

1. M/k_∞: 最大 p-分岐 p-拡大 ("p-分岐"="p 上に無い素点は不分岐") とする. 伊原氏による, $\mathrm{Gal}(M/k_\infty)$ の $\mathbb{P}^1-\{0,1,\infty\}$ の基本群の pro-p-完備化への作用から引き起こされる表現の研究 ([3], etc.).

2. Wingberg による, 代数体と有限体上の代数曲線の類似の追求 ([11]). M_{pos}/k_∞ を maximal positively p-ramified extension とする. (F/k_∞:positively p-ramified$\Longleftrightarrow F\subseteq M,\ F_p\subseteq(k_\infty^+(p)k_\infty)_p$. ここで, k_∞^+ は k_∞ の最大実部分体, $k_\infty^+(p)/k_\infty^+$ は最大 p-拡大, $*_p$ は p 上の素点による完備化.) このとき k_∞ の最大不分岐 p-拡大体 $\tilde{L}_{k_\infty}$ は $M_{\rm pos}$ に含まれていて, $\mathrm{Gal}(M_{\rm pos}/k_\infty)$ は代数閉体上の種数 $\lambda^-(k_\infty/k)$ (岩澤 λ-不変量の $(-)$-部分) の代数曲線の基本群の pro-p-完備化と同型になっている. 通常の岩澤理論は, k_∞/k の岩澤加群の $(-)$-部分と有限体上の代数曲線の Jacobian の Tate 加群という, "アーベル化された部分" の類似を与えているが, Wingberg の結果はアーベル化せずとも類似が成立しており, その際には代数体側では $\mathrm{Gal}(\tilde{L}_{k_\infty}/k_\infty)$ ではなく, $\mathrm{Gal}(M_{\rm pos}/k_\infty)$ を採るとうまくいくことを示している.

3. Wingberg による $\mathrm{Gal}(\tilde{L}_{k_\infty}/k_\infty)$ の研究 ([12]). これは, 今回の話で非常に重要な役割を果たしているので, 後で詳しく説明する.

今回の我々の目標物は $\mathbb{Z}_p$-拡大体の最大不分岐 p-拡大で, 一言で言えば不分岐 p-拡大の岩澤理論を展開したい. その理由は, 代数曲線との類似という観点からは, 上でも紹介したように p 上の素点の分岐を許した方が整った理論を展開することができるが, 私は不分岐拡大の部分にこそ代数体特有の面白い現象 (或いは困難) が起きていると考えるからである.

具体的にどのように不分岐p-拡大の岩澤理論を展開するかを説明する前に, 通常の(不分岐アーベルp-拡大の) 岩澤理論を少し復習しておく (岩澤[4],[5] 参照).

kを有限次代数体, pを素数 (以下固定しておく) とする. 岩澤理論ではkのイデアル類群 (のp-部分) を知るためにk上のp冪次巡回拡大の無限塔

$$k = k_0 \subseteq k_1 \subseteq k_2 \subseteq \cdots \subseteq k_n \subseteq \cdots \subseteq K = \cup_{n=1}^{\infty} k_n \quad (k_n/k : p^n \text{ 次巡回拡大})$$

を考える. $\Gamma := \mathrm{Gal}(K/k) \simeq \mathbb{Z}_p$ なので, このような拡大を$\mathbb{Z}_p$-拡大と呼ぶ. A_nをk_nのイデアル類群のp-部分とすると, 類体論によりこれはk_n上の最大不分岐アーベルp-拡大L_n/k_nのガロワ群と同型である. 従って, L/Kを最大不分岐アーベルp-拡大とすれば, $X := \mathrm{Gal}(L/K) \simeq \varprojlim A_n$ (射影的極限はノルム写像に関するもの) でこれには, 完備群環 $\Lambda := \mathbb{Z}_p[[\Gamma]] := \varprojlim \mathbb{Z}_p[\mathrm{Gal}(k_n/k)]$ が作用している (右辺にこれが作用していることは見易い). 従って, XはΛ-加群の構造を持つ. このXを**岩澤加群**という. 岩澤理論の基本的事実として, Xは有限生成 torsion Λ-加群であることが知られている. 岩澤先生は有限生成Λ-加群Xの構造を研究するとともに, A_nがXのどのような商であるかということを考察して, 有名な岩澤類数公式を示した :

岩澤類数公式 ある整数νが存在して, 十分大なるすべてのnに対して

$$\# A_n = p^{\lambda n + \mu p^n + \nu}$$

が成立する. ここで, $\lambda = \mathrm{rank}_{\mathbb{Z}_p} X$, $\mathrm{Tor}_{\mathbb{Z}_p} X \sim \bigoplus_{i=1}^{r} \Lambda/p^{m_i}$ とするとき, $\mu = \sum_{i=1}^{r} m_i$ ($\sim$は ker, coker が共に有限であるΛ-準同型 (擬同型) を表す).

$\lambda = \lambda(K/k)$ と $\mu = \mu(K/k)$ は$\mathbb{Z}_p$-拡大K/kにより定まる, 岩澤加群XのΛ-加群構造不変量である. これらはK/kの**岩澤不変量**と呼ばれ, 岩澤理論における主要な対象の１つである.

通常の岩澤理論の対象はイデアル類群A_n (或いは最大不分岐アーベルp-拡大のガロワ群 $\mathrm{Gal}(L_n/k_n)$ といってもよい), 及び岩澤加群 $X = \mathrm{Gal}(L/K)$ であるが, 我々は最大不分岐p-拡大$\tilde{L}_n/k_n$及び$\tilde{L}/K$のガロワ群を考察の対象とする. これらの間には $\mathrm{Gal}(\tilde{L}_n/k_n)^{\mathrm{ab}} = \mathrm{Gal}(L_n/k_n)$, $\mathrm{Gal}(\tilde{L}/K)^{\mathrm{ab}} = \mathrm{Gal}(L/K)$ という関係があることに注意しよう.

有限次代数体kの最大不分岐p-拡大$\tilde{L}_k/k$は古くから興味の対象で, これはk上のp-**類体塔**と呼ばれている. 「(p-) 類体塔は有限で切れるのでは無かろうか？」というのは類体論成立当初 (1920頃) からの予想であったが (Furtwängler, Hasse), ４０年以上経って Golod-Shafarevich によって否定的に解決された (1964). この話が示すように $\mathrm{Gal}(\tilde{L}_k/k)$ は非常に困難な対象であり, 例えばそれが有限であるかどうかの判定ですら難しい.

我々は岩澤理論によって最大不分岐アーベルp-拡大のガロワ群を理解したように, 最大不分岐p-拡大のガロワ群 $\mathrm{Gal}(\tilde{L}_n/k_n)$ を$\mathbb{Z}_p$-拡大を通じて理解する非アーベル岩澤理論の展開を試みる. これにより期待されることの１つに, $\mathrm{Gal}(\tilde{L}/K)$ に関する知見から $\mathrm{Gal}(\tilde{L}_n/k_n)$ の性質を導くということが考えられる. 例えば, 既に Wingberg[12] は $K/k = \mathbb{Q}(\mu_{p^\infty})/\mathbb{Q}(\mu_p)$ の場合で, $p = 157$ のときに $\mathrm{Gal}(\tilde{L}/K)$ が自由 pro-p 群であ

ることを示し, この事実から $\#\mathrm{Gal}(\tilde{L}_0/k)=\infty$, 即ち, $\mathbb{Q}(\mu_{157})$ の 157-類体塔は無限であることを示している. 現状ではこれに匹敵するような結果は得られていないので, これは今後の課題である.

2. 方法

以下素数 p を固定して, K/k を $\mathbb{Z}_p$-拡大とする. そして, $\tilde{G}=\mathrm{Gal}(\tilde{L}/K)$, $\tilde{G}_n=\mathrm{Gal}(\tilde{L}_n/k_n)$ とおく. いきなり $\tilde{G}$ や $\tilde{G}_n$ そのものを考察するのは困難なので, 常套手段に従いこれらの群に適当な filtlation を入れて考える. ここでは filtlation として, もっとも自然である降中心列を採用する. 理由の 1 つは, 後で説明するが, $\tilde{G}$ や $\tilde{G}_n$ の降中心列商は類体論で扱うことができるからである.

$\tilde{G}$ の降中心列

$$\tilde{G}=C_1(\tilde{G})\supseteq C_2(\tilde{G})\supseteq C_3(\tilde{G})\supseteq C_4(\tilde{G})\supseteq\cdots,$$
$$C_i(\tilde{G})=[C_{i-1}(\tilde{G}),\tilde{G}]\ (i\geq 2).$$

に対し, その第 i 番目の商

$$X^{(i)}:=C_i(\tilde{G})/C_{i+1}(\tilde{G})\quad (i\geq 1)$$

を i **次岩澤加群**と呼ぶことにする. $\tilde{G}_n$ に対しても同様に

$$X_n^{(i)}:=C_i(\tilde{G}_n)/C_{i+1}(\tilde{G}_n)\quad (i\geq 1)$$

を定義する. このとき $X^{(1)}$ は通常の岩澤加群で, $X_n^{(1)}=\mathrm{Gal}(L_n/k_n)\simeq A_n$ であることに注意しよう. 以下で説明するが, $X^{(i)}$ はその呼び名の通り Λ-加群構造を持っている. その前にもう少し定義を続ける. $\tilde{L}/K$ と $\tilde{L}_n/k_n$ の中間体 $L^{(i)}$ と $L_n^{(i)}$ $(i\geq 0)$ を

$$L^{(i)}=\tilde{L}^{C_{i+1}(\tilde{G})},\quad L_n^{(i)}=\tilde{L}_n^{C_{i+1}(\tilde{G}_n)}$$

で定義すると, $X^{(i)}=\mathrm{Gal}(L^{(i)}/L^{(i-1)})$, $X_n^{(i)}=\mathrm{Gal}(L_n^{(i)}/L_n^{(i-1)})$ となっている. ここで $L^{(1)}/K$ と $L_n^{(1)}/k_n$ は通常の岩澤理論が対象としている, 最大不分岐アーベル p-拡大である. 定義より, $L_n^{(i)}$ は $L_n^{(i-1)}/k_n$ の中心 p-類体, 即ち, $\mathrm{Gal}(F/L_n^{(i-1)})$ が $\mathrm{Gal}(F/k_n)$ の中心に含まれるような $L_n^{(i-1)}$ の最大の不分岐アーベル p-拡大体 F である. このことより, $X_n^{(1)}$ と同様に $X_n^{(i)}$ $(i\geq 2)$ もイデアル類群を用いて

$$X_n^{(i)}\simeq A(L_n^{(i-1)})_{\mathrm{Gal}(L_n^{(i-1)}/k_n)},$$

と表すことができる (ここで, $A(L_n^{(i-1)})$ は $L_n^{(i-1)}$ のイデアル類群の p-部分を表す). 後で説明するが, 中心類体を類体論で扱うことができるという事実が, 以下では重要となってくる.

それでは, 高次岩澤加群への Λ-作用について説明しよう. 先に説明したように, $X^{(i)}=\mathrm{Gal}(L^{(i)}/L^{(i-1)})\subseteq Z(\mathrm{Gal}(L^{(i)}/K))$ であるから, $\gamma\in\mathrm{Gal}(K/k)$ と $x\in X^{(i)}$ に対し, $\gamma x=\tilde{\gamma}x\tilde{\gamma}^{-1}$ $(\tilde{\gamma}\in\mathrm{Gal}(L^{(i)}/k),\ \tilde{\gamma}|_K=\gamma)$ と定義すれば, これは $\tilde{\gamma}$ の選び方に依らない. よって, $X^{(i)}$ は $\mathrm{Gal}(K/k)$-加群の構造を持つので, 自然に $\Lambda=\mathbb{Z}_p[[\mathrm{Gal}(K/k)]]$-加群の構造をもつ. このことは $X_n^{(i)}$ に関しても同様である.

前節でも述べたように岩澤加群 $X = X^{(1)}$ は有限生成 torsion Λ-加群であるが, 高次岩澤加群に関しては次が示される：

命題 1． (1) $\mu(K/k) = 0$ ならば, $i \geq 1$ に対して $X^{(i)}$ は $\mathbb{Z}_p$ 上有限生成, 従って有限生成 torsion Λ-加群.
(2) $\mu(K/k) > 0$ ならば, $i \geq 2$ に対して $X^{(i)}$ は Λ 上有限生成でない.
(3) $\mu(K/k)$ の値に拘わらず, 任意の $i \geq 1$ について, $\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}_p} X^{(i)}$ は有限で, $\mathbb{Z}_p$-加群として $X^{(i)} \simeq \mathbb{Z}_p^{\oplus r} \oplus \mathrm{Tor}_{\mathbb{Z}_p} X^{(i)}$ $(r = \mathrm{rank}_{\mathbb{Z}_p} X^{(i)})$ となっている.

この命題より, $\mu > 0$ の場合の $X^{(i)}$ $(i \geq 2)$ は通常の岩澤加群とはかなり様子が違うことが分かる.

以下, 我々はこの設定の下で次の２つの主題を取り上げる. １つは岩澤類数公式のこの非アーベル的な状況における類似について (第３節) であり, もう１つは, 特に K/k が虚二次体上の円分的 $\mathbb{Z}_p$-拡大の場合の $\tilde{G}$ や高次岩澤加群の構造について (第４節) である.

3. 岩澤類数公式の非アーベル類似

岩澤類数公式は $A_n \simeq X_n^{(1)}$ の位数の挙動を K/k の岩澤不変量 $\lambda(K/k)$, $\mu(K/k)$, $\nu(K/k)$ を用いて記述する公式であった. この類似として, $X_n^{(i)}$ の位数の挙動を何らかの $X^{(i)}$ の構造不変量を用いて記述できないか, ということが自然な問題として考えられる. そこで, 高次岩澤 λ-不変量を次のように定義する.

定義． K/k の i 次岩澤 λ-不変量 $\lambda^{(i)}(K/k)$ を

$$\lambda^{(i)}(K/k) := \mathrm{rank}_{\mathbb{Z}_p} X^{(i)} \quad (i \geq 1)$$

で定義する.

命題 1(3) より, $\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}_p} X^{(i)}$ は有限であることに注意する. 高次の μ-不変量に関して言えば, $\mu(K/k) = 0$ の場合には, 命題 1(1) より $X^{(i)}$ の μ-不変量は 0 である. しかし, $\mu(K/k) > 0$, $i \geq 2$ の場合には, 命題 1(2) より $X^{(i)}$ の通常の意味での μ-不変量は定義できない. 後で $\mu(K/k) > 0$ の場合についても触れるが, まず $\mu(K/k) = 0$ の場合を考える.

ここで, 次のような予想を提起したい：

予想． $\mu(K/k) = 0$ とする. 各 $i \geq 1$ に対し, ある整数 $\nu^{(i)}(K/k)$ が存在して,

$$\# X_n^{(i)} = p^{\lambda^{(i)}(K/k)n + \nu^{(i)}(K/k)}$$

が十分大なるすべての n に対して成立する？
或いは,

$$\# X_n^{(i)} = p^{\lambda^{(i)}(K/k)n + O(1)}$$

が成立する？

つまり, $i \geq 2$ の場合にも, 岩澤類数公式 ($i=1$ の場合) と全く同様にして $X_n^{(i)}$ の位数が高次岩澤不変量で記述されるであろう, という予想である. 実際に次の定理はある種の $\mathbb{Z}_p$-拡大と小さい i については, この予想が正しいことを示している.

定理 1. k を CM-体, K/k を円分的 $\mathbb{Z}_p$-拡大 ($p \neq 2$) とする. もしも,
(i) k の最大実部分体 k^+ の類数は p と素で, k^+ の p 上の素点は唯一つ,
(ii) $\mu(K/k)=0$,
が成立すれば, ある整数 $\nu^{(2)}(K/k)$, $\nu^{(3)}(K/k)$ が存在して, 十分大なるすべての n について

$$\#X_n^{(2)} = p^{\lambda^{(2)}(K/k)n+\nu^{(2)}(K/k)}$$
$$\#X_n^{(3)} = p^{\lambda^{(3)}(K/k)n+\nu^{(3)}(K/k)}$$

が成り立つ.

注意 1. 定理の条件 (ii) は常に成立すると予想されており (岩澤予想), 実際に $k/\mathbb{Q}$ がアーベル拡大の場合には Ferrero-Washington [1] によって証明されている.

定理の条件を満たす K/k の例としては, 虚二次体 k 上の円分的 $\mathbb{Z}_p$-拡大や p-分体 $\mathbb{Q}(\mu_p)$ ($p < 8,000,000$ は素数) 上の円分的 $\mathbb{Z}_p$-拡大が挙げられる.
　定理 1 の系として, k_n 上の class 2 と class 3 の最大不分岐 p-拡大のガロワ群の位数の挙動について次が直に得られる：

系. K/k は定理 1 と同様とする. このときある整数 a, b が存在して, 十分大きいすべての n に対して,

$$\#\mathrm{Gal}(L_n^{(2)}/k_n) = p^{(\lambda^{(1)}(K/k)+\lambda^{(2)}(K/k))n+a}$$
$$\#\mathrm{Gal}(L_n^{(3)}/k_n) = p^{(\lambda^{(1)}(K/k)+\lambda^{(2)}(K/k)+\lambda^{(3)}(K/k))n+b}$$

が成立する.

それでは, 定理 1 の証明のアイデアを簡単に説明しよう. まず, 類体論より各 $i \geq 2$ と $m \geq n$ について次の完全可換図式が得られる：

$$(1)\qquad \begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{H}_m^{(i-1)} & \longrightarrow & H_2(\mathrm{Gal}(L_m^{(i-1)}/k_m),\mathbb{Z}_p) & \longrightarrow & X_m^{(i)} & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle N_{m,n}}\downarrow & & \downarrow & & {\scriptstyle p_{m,n}}\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{H}_n^{(i-1)} & \longrightarrow & H_2(\mathrm{Gal}(L_n^{(i-1)}/k_n),\mathbb{Z}_p) & \longrightarrow & X_n^{(i)} & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

ここで, E_n が k_n の単数群を表すとすれば, $\mathcal{H}_n^{(i-1)} = E_n/(N_{L_n^{(i-1)}/k_n} L_n^{(i-1)\times} \cap E_n)$ で, $N_{m,n}$ はノルム写像, $p_{m,n}$ は自己同型の定義域の制限から引き起こされる自然な写像

$(L_n^{(i)} \subseteq L_m^{(i)})$, 中央の縦写像は自然な写像 $\mathrm{Gal}(L_m^{(i-1)}/k_m) \longrightarrow \mathrm{Gal}(L_n^{(i-1)}/k_n)$ から誘導される homology 群の間の写像である. よって $X_n^{(i)}$ の位数の挙動を知るには, $H_2(\mathrm{Gal}(L_n^{(i-1)}/k_n), \mathbb{Z}_p)$ と $\mathcal{H}_n^{(i-1)}$ の位数の挙動を調べれば良い.

前者は Schur multiplier と呼ばれる群論的な量で, $i=2$ のときは $\mathrm{Gal}(L_n^{(1)}/k_n)$ はアーベル群なので $H_2(\mathrm{Gal}(L_n^{(1)}/k_n), \mathbb{Z}_p) \simeq \mathrm{Gal}(L_n^{(1)}/k_n) \wedge \mathrm{Gal}(L_n^{(1)}/k_n) \simeq A_n \wedge A_n$ となる (アーベル群 M に対して, $M \wedge M := (M \otimes M)/\langle m \otimes m | m \in M \rangle$ は外積を表す). A_n のアーベル群としての構造の挙動は通常の岩澤理論により分かるので, これより $H_2(\mathrm{Gal}(L_n^{(1)}/k_n), \mathbb{Z}_p)$ の挙動も知ることができる. $i=3$ の場合は, もはや $\mathrm{Gal}(L_n^{(2)}/k_n)$ は一般にアーベル群にならないので, この群の Schur multiplier は容易に知ることはできない. しかし, 定理の仮定により $\mathrm{Gal}(L_n^{(2)}/k_n)$ には複素共役が involution として作用しているので, これを手がかりに $\mathrm{Gal}(L_n^{(2)}/k_n)$ の群構造の挙動を, $i=2$ の場合の類数公式も用いることにより知ることができる. これを用いて $H_2(\mathrm{Gal}(L_n^{(2)}/k_n), \mathbb{Z}_p)$ の挙動も知ることができる.

$\mathcal{H}_n^{(i-1)}$ は, まったくもって難しい対象であるが (大雑把に言って, これは $\mathrm{Gal}(\tilde{L}/K)$ の自由 pro-p 群からの離れ具合を表している. 第4節の最後の部分を参照), $i=2,3$ については完全可換図式(1) と $H_2(\mathrm{Gal}(L_n^{(i-1)}/k_n), \mathbb{Z}_p)$ の挙動から, $\mathcal{H}_n^{(i-1)}$ の挙動も知ることができる. 従って, $X_n^{(i)}$ $(i=2,3)$ の位数の挙動が分かり, 定理を得る.

今後の課題として, 上の定理の仮定を弱めることや, $i \geq 4$ の場合の類数公式を示すことが挙げられる. 現状ではまだそこには至っていないが, これから鋭意研究していくつもりである.

次に $\mu(K/k) > 0$ の場合に関しても, 特殊な場合には $X_n^{(2)}$ に対する類数公式を示すことができる. この場合には $X^{(2)}$ は Λ-上有限生成にならないので, $X_n^{(2)}$ に対する類数公式は, 通常の岩澤類数公式とは随分と違う形態をしている:

定理2. K/k を次を満たす $\mathbb{Z}_p$-拡大 $(p \neq 2)$ とする:
(i) K/k の岩澤加群 X が $(\Lambda/p)^{\oplus\mu}$ と同型, (このとき $\mu(K/k) = \mu$),
(ii) K の p 上の素点は唯1つ.
このとき, ある非負整数 $\kappa(K/k)$ と整数 $\nu^{(2)}(K/k)$ が存在して, 十分大なるすべての n について

$$\# X_n^{(2)} = p^{(\frac{\mu p^n - 1}{2}\mu)p^n - \kappa(K/k)p^n + \nu^{(2)}(K/k)}$$

が成立する.

まず, 与えられた任意の素数 $p \neq 2$ と整数 $\mu \geq 0$ に対して, 定理2の条件 (i),(ii) をみたす $\mathbb{Z}_p$-拡大は実際に (無数に) 存在することが示されていることを注意しておく ([9]):

例. $K/\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ を anti-cyclotomic $\mathbb{Z}_3$-拡大 ($\mathbb{Q}$ 上ガロワ拡大となる $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ の $\mathbb{Z}_3$-拡大で円分的でないもの) とする. $f_1 = 7 \cdot 19$, $f_2 = 7 \cdot 19 \cdot 43$, $f_3 = 7 \cdot 19 \cdot 43 \cdot 1597$ とおき, F_i を導手 f_i の3次巡回体で, 3が惰性しているものとする (i=1,2,3). このとき $\mathbb{Z}_3$-拡大 $F_iK/F_i\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ の岩澤加群は $X \simeq (\Lambda/3)^{\oplus i}$ $(i=1,2,3)$ となっている.

定理２の証明の基本的な方針も定理１と同様に, 完全可換図式(1) に基づくものである. 定理の仮定を用いると, 完全系列

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}_n^{(1)} \longrightarrow (\mathbb{Z}_p[\mathrm{Gal}(k_n/k)]/p)^{\oplus \frac{\mu p^n - 1}{2}\mu} \longrightarrow X_n^{(2)} \longrightarrow 0 \tag{2}$$

が得られ, これの射影的極限をとると,

$$0 \longrightarrow \varprojlim \mathcal{H}_n^{(1)} \longrightarrow \prod_{i=1}^{\infty} \Lambda/p \longrightarrow X^{(2)} \longrightarrow 0 \tag{3}$$

という完全系列が得られる. ここで, 一般の $\mathbb{Z}_p$-拡大 K/k について $\varprojlim \mathcal{H}_n^{(1)}$ は有限生成 Λ-加群であることが通常の岩澤理論により分かるので, この完全系列からも $X^{(2)}$ が Λ-上有限生成でないことが分かる.

$\varprojlim \mathcal{H}_n^{(1)}$ が有限生成 Λ-加群であることと完全系列(3) より, ある定数 $\kappa \geq 0$ が存在して $\varprojlim \mathcal{H}_n^{(1)} \simeq (\Lambda/p)^{\oplus\kappa}$ となる. 結局, この κ が定理の $\kappa(K/k)$ となる. 完全系列(2) の第１項の位数は, n が十分大きいとき $p^{\kappa p^n + c}$ (c は定数) と書けることがわかるので, 定理の主張が示される.

定理２の仮定はかなり強いものではあるが, この結果はより一般の $\mu(K/k) > 0$ となる $\mathbb{Z}_p$-拡大についても, $X_n^{(i)}$ の位数を表す何らかの公式が存在することを示唆しているように思われる.

４．高次岩澤 λ-不変量および $\mathbb{Z}_p$-拡大体上の最大不分岐 p-拡大のガロワ群の構造

この節では, いくつかの $\mathbb{Z}_p$-拡大 K/k に対して具体的に高次岩澤 λ-不変量を決定し, さらには, K 上の最大不分岐 p-拡大のガロワ群 $\tilde{G}$ の構造の情報を与える結果を述べる.

まず, Wingberg によって得られた, $\tilde{G}$ について知られている最も著しい結果について解説する. その前に記号を少し導入しておく. 体 $F \subseteq \overline{\mathbb{Q}}$ に対して, $\tilde{L}_F/F$ で最大不分岐 p-拡大を, $\tilde{L}'_F/F$ で最大不分岐 p-分解 p-拡大 (即ち, 不分岐 p-拡大で, F の p 上の素点がすべて完全分解するような最大の拡大) を表し, $\tilde{G}_F = \mathrm{Gal}(\tilde{L}_F/F)$, $\tilde{G}'_F = \mathrm{Gal}(\tilde{L}'_F/F)$ と置く. また, L_F/F と L'_F/F をそれぞれ $\tilde{L}_F/F$ と $\tilde{L}'_F/F$ の最大アーベル部分拡大とする. そして, 有限次代数体 k(と固定されている素数 p) に対して, k_∞/k で円分的 $\mathbb{Z}_p$-拡大を表す.

Wingberg は k_∞/k がある条件をみたす CM-体の円分的 $\mathbb{Z}_p$-拡大の場合に, $\tilde{G}_{k_\infty}$ が自由 pro-p 群になるための必要十分条件を与えた:

定理 (Wingberg[12]). p を奇素数とする. k を次の条件を満たす CM-体とする:
(i) $\mu(k_\infty/k) = 0$,
(ii) $\mu_p \subseteq k$ (μ_p は１の p 乗根全体).
このとき, k^+ を k の最大実部分体とすれば,

$$\tilde{G}'_{k_\infty} \text{が自由 pro-}p\text{-群} \Longleftrightarrow \mathrm{Gal}(L'_{k^+_\infty}/k^+_\infty) = 0.$$

さらに, k/k^+ で p 上のすべての素点が不分解ならば,

$$\tilde{G}_{k_\infty} \text{が自由 pro-}p\text{-群} \Longleftrightarrow \mathrm{Gal}(L_{k_\infty^+}/k_\infty^+) = 0.$$

注意 2. Nguyen Quang Do [7] も Wingberg と独立に上とほぼ同様な結果が得ている.

この定理を用いて高次岩澤 λ-不変量の実例が沢山得られる：

例. $p < 8,000,000$, 素数として k_∞/k を円分的 $\mathbb{Z}_p$-拡大 $\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty})/\mathbb{Q}(\mu_p)$ とする. このとき, k^+ の類数は p と素で (つまり Vandiver 予想が成立), k_∞ には p 上の素点は唯一つしかないので, よく知られた岩澤の結果により k_n^+ $(n \geq 0)$ の類数も p と素であるから $\mathrm{Gal}(L_{k_\infty^+}/k_\infty^+) = 0$ となっている. また, Ferrero-Washington の定理により $\mu(k_\infty/k) = 0$ である. 従って, 上の Wingberg の定理により $\tilde{G}_{\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty})}$ は階数が $\lambda(\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty})/\mathbb{Q}(\mu_p))$ の自由 pro-p 群である. よって, 自由群の降中心列商の階数に関する Witt の公式により,

$$\lambda^{(i)}(\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty})/\mathbb{Q}(\mu_p)) = \frac{1}{i}\sum_{d|i}\mu(d)\lambda(\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty})/\mathbb{Q}(\mu_p))^{\frac{i}{d}} \quad (i \geq 1),$$

($\mu(*)$ は Möbius 函数)

が得られる. いくつか数値例を挙げる:
$p = 157$: $\lambda^{(1)} = 2$, $\lambda^{(2)} = 1$, $\lambda^{(3)} = 2$, $\lambda^{(4)} = 3$, $\lambda^{(5)} = 6$, $\lambda^{(6)} = 9$, $\lambda^{(7)} = 18\ldots$
$p = 491$: $\lambda^{(1)} = 3$, $\lambda^{(2)} = 3$, $\lambda^{(3)} = 8$, $\lambda^{(4)} = 18$, $\lambda^{(5)} = 48$, $\lambda^{(6)} = 116$, $\lambda^{(7)} = 312\ldots$

以下では虚二次体上の円分的 $\mathbb{Z}_p$-拡大 k_∞/k を考える. この場合は後述のように $\tilde{G}_{k_\infty}$ は必ずしも自由 pro-p-群にならない. よって, $\tilde{G}_{k_\infty}$ がどのような構造を持っているか非常に興味深い. 先ず $p = 3$ の場合を取り扱う. 以下に述べる方法は多少の修正で p が奇素数の場合に一般化できるが, 簡単のため $p = 3$ として話を進める.

最初に, 上述の Wingberg の定理を用いて虚二次体上の円分的 $\mathbb{Z}_3$-拡大に対して $\tilde{G}_{k_\infty}$ が自由 pro-3 群になるための十分条件を与えよう.

命題 2. 3 は $k = \mathbb{Q}(\sqrt{-m})$ で不分解 とする. このとき

$$A'(\mathbb{Q}(\sqrt{3m})\mathbb{Q}(\mu_9)^+) = 0 \Longrightarrow \tilde{G}_{k_\infty} \text{は自由 pro-3 群}$$

ここに $A'(*)$ は 3-イデアル類群の 3-部分を表す.
特に $\mathbb{Q}(\sqrt{3m})/\mathbb{Q}$ で 3 が不分解のときは,

$$\mathbb{Q}(\sqrt{3m}) \text{ の類数が 3 と素} \Longrightarrow \tilde{G}_{k_\infty} \text{は自由 pro-3 群}$$

となる.

命題 2 は, Wingberg の定理を μ_3 を含む CM-体 $\mathbb{Q}(\sqrt{-m}, \sqrt{-3})$ に対して適用することによって得られる.

次に $\tilde{G}_{k_\infty}$ $(k = \mathbb{Q}(\sqrt{-m}))$ が自由 pro-3 群にならないための十分条件を与えよう. そのために記号をいくつか準備する.
$D_n^{(2)} := \langle (\mathfrak{P}, L_n^{(2)}/L_n) \mid \mathfrak{P}|3, L_n$ の素イデアル $\rangle \subseteq X_n^{(2)}$ とする.
χ_{3m} を実二次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{3m})$ に対応する 3-進 Dirichlet 指標, $f(T, \chi_{3m}) \in \mathbb{Z}_3[[T]]$ を 3-進 L-函数 $L_3(s, \chi_{3m})$ に付随する岩澤冪級数 $(L_3(s, \chi_m) = f(4^s - 1, \chi_{3m}))$ とし,
$f(T, \chi_{3m}) = \left(\prod_{i=1}^{\lambda(k_\infty/k)} (T - \alpha_i)\right) U(T)$, $\alpha_i \in \overline{\mathbb{Q}}_3$, $|\alpha_i|_3 < 1$ ($|\ |_3$: 3-進絶対値),
$U(T) \in \mathbb{Z}_3[[T]]^\times$ とする.

命題 3. 3 は $k = \mathbb{Q}(\sqrt{-m})$ で不分解で, $\lambda(k_\infty/k) \geq 2$ とする. もしも,
(i) ある $n \geq 0$ に対して $D_n^{(2)} \neq 0$,
(ii) $1 \leq i < j \leq \lambda(k_\infty/k) \Longrightarrow (1 + \alpha_i)(1 + \alpha_j) \neq 1$
ならば, $F_{\lambda(k_\infty/k)}$ を階数 $\lambda(k_\infty/k)$ の自由 pro-3 群とするとき,

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{k_\infty} \simeq F_{\lambda(k_\infty/k)}/R,\ R &\subseteq C_2(F_{\lambda(k_\infty/k)}) := [F_{\lambda(k_\infty/k)}, F_{\lambda(k_\infty/k)}], \\ R &\not\subseteq C_3(F_{\lambda(k_\infty/k)}) := [F_{\lambda(k_\infty/k)}, C_2(F_{\lambda(k_\infty/k)})]. \end{aligned}$$

つまり, 条件 (i),(ii) が成立していれば, $\tilde{G}_{k_\infty}$ は "浅いところ" に relation を持っていることが分かる.

命題 3 の証明の概略を述べる. 定理 2 の証明と同様にして, Λ-加群の完全系列

$$0 \longrightarrow \varprojlim \mathcal{H}_n^{(1)} \longrightarrow X \wedge X \longrightarrow X^{(2)} \longrightarrow 0$$

が得られる. ここで, $X \wedge X$ への $\mathrm{Gal}(k_\infty/k)$-作用は $\gamma(x \wedge y) = \gamma x \wedge \gamma y$ ($\gamma \in \mathrm{Gal}(k_\infty/k)$, $x, y \in X$) で与えられ, これにより $X \wedge X$ は Λ-加群の構造を持つ. 岩澤主予想=Mazur-Wiles の定理 (X への $\mathrm{Gal}(k_\infty/k)$-作用が岩澤冪級数の零点 α_i で記述できる) と条件 (ii) を用いることにより, $(X \wedge X)^{\mathrm{Gal}(k_\infty/k)} = 0$ が分かる. $\varprojlim D_n^{(2)}$ は $\mathrm{Gal}(k_\infty/k)$ が自明に作用する $X^{(2)}$ の部分 Λ-加群であるが, 条件 (i) よりこれは非自明である. 従って, $H_2(X, \mathbb{Z}_p) \simeq X \wedge X \not\simeq X^{(2)}$. 今, $1 \longrightarrow R \longrightarrow F_{\lambda(k_\infty/k)} \longrightarrow \tilde{G}_{k_\infty} \longrightarrow 1$ を $\tilde{G}_{k_\infty}$ の極小表現とすれば, $R \subseteq C_2(F_{\lambda(k_\infty/k)})$ で $C_2(F_{\lambda(k_\infty/k)})/C_3(F_{\lambda(k_\infty/k)}) \simeq H_2(X, \mathbb{Z}_p) \not\simeq X^{(2)} \simeq C_2(F_{\lambda(k_\infty/k)})/C_3(F_{\lambda(k_\infty/k)})R$ となっているので, 命題を得る.

命題 2, 3 と計算機を用いて, いくつかの虚二次体 $k = \mathbb{Q}(\sqrt{-m})$ 上の円分的 $\mathbb{Z}_3$-拡大 k_∞/k の高次岩澤不変量を決定することができる. 試みに 3 が $k = \mathbb{Q}(\sqrt{-m})$ で不分解で, $1 \leq m \leq 5{,}000$, $\lambda(k_\infty/k) = 2$ となるような虚二次体 k に対して, 代数体の計算ソフトウェア KASH と水沢氏 (早稲田大学) の作成した岩澤冪級数計算プログラムを用いて数値実験を行った.

そのような虚二次体 k は全部で 134 個ある:
• それらの k の内の 111 個については $(m = 186, 211, 231, 249, 334, \ldots)$, 命題 2 から $\tilde{G}_{k_\infty}$ は階数 2 の自由 pro-3 群である. したがって Witt の公式から, 高次岩澤 λ-不変量は

$$\lambda^{(i)}(K/k) = \frac{1}{i} \sum_{d|i} \mu(d) 2^{\frac{i}{d}} \quad (i \geq 1),$$

となる.
• それらの k の内の 3 個については ($m = 2437, 3886, 4027$), 命題 3 から ($D_0^{(2)} \neq 0$), $\tilde{G} \simeq F_2/R$, $R \subseteq C_2(F_2)$, $R \not\subseteq C_3(F_2)$. 従って高次岩澤 λ-不変量は

$$\lambda^{(1)}(K/k) = 2,\ \lambda^{(i)}(K/k) = 0\ (i \geq 2),\ \text{となる.}$$

• 残りの 20 個の k に関しては, 不明である. これらの k は命題 2 の条件を満たさないし, $D_n^{(2)} \neq 0$ ($\exists n \geq 0$) であるかを 6 次以下の代数体の計算では決定できない. しかし命題 3 の条件 (ii) は満たしている.

注意 3. 命題 2, 3 では 3 が虚二次体 k で不分解であることを仮定した. 素数 p ($p = 2$ でもよい) が虚二次体 k で分解しているときには, 円分的 $\mathbb{Z}_p$-拡大 k_∞/k に対して $\tilde{G}_{k_\infty}$ は $\mathbb{Z}_p$ と同型になる場合を除いては自由 pro-p 群にならないことが, k と p に対する一般 **Greenberg 予想** (Greenberg [2] 参照) から従う. 虚二次体 k の類数が p と素であるとき, この予想は成立することが Minardi[6] によって示されている ([8] 参照).

次に $p = 2$ の場合を考える. この場合は種の理論を用いることによって, p が奇素数の場合よりも踏み込んだ結果を得ることができる.

まず, 円分的 $\mathbb{Z}_2$-拡大 k_∞/k に対して, $\tilde{G}_{k_\infty}$ が自由 pro-2 群になる虚二次体 k を完全に決定することができる:

定理 3. $k = \mathbb{Q}(\sqrt{-m})$ を虚二次体, k_∞/k を円分的 $\mathbb{Z}_2$-拡大, $\tilde{G}_{k_\infty}$ を k_∞ 上の最大不分岐 2-拡大のガロワ群とする. このとき
$\tilde{G}_{k_\infty}$ が自由 pro-2 群 $\Longleftrightarrow$ $m = 1,\ 2,\ p,\ 2p,\ qr,\ 2qr,$

$$p, q, r: \text{素数},\ p \equiv 3 \pmod 8,\ q \equiv 5 \pmod 8,\ r \equiv 3 \pmod 4$$

定理 3 で, $m = 1,\ 2,\ p,\ 2p$ の場合は $\tilde{G}_{k_\infty} = 1$, $m = qr,\ 2qr$ の場合は $\tilde{G}_{k_\infty}$ は階数が $2^{v_2(r+1)-2}$ の自由 pro-2 群になることが, λ-不変量 ($= \tilde{G}_{k_\infty}^{ab}$ の $\mathbb{Z}_2$-階数) に関する木田の公式から分かる (v_2 は正規 2-進付値). 特に, $\tilde{G}_{k_\infty}$ はいくらでも大きい階数の自由 pro-2 群になり得る.

定理 3 の証明の概略を述べる. まず, $\Longrightarrow$ の部分を説明する. もしも $\tilde{G}_{k_\infty}$ が自由ならば, $k = \mathbb{Q}(\sqrt{-m})$ の不分岐 2 次拡大 $k' = \mathbb{Q}(\sqrt{-m}, \sqrt{d})$ ($d \mid m,\ d \equiv 1 \pmod 4$) に対して,

$$\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}_2} \tilde{G}_{k'_\infty}^{ab} - 1 = 2(\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}_2} \tilde{G}_{k_\infty}^{ab} - 1)$$

となることが, 自由群に関する Schreier の定理から分かる. $\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}_2} \tilde{G}_{k_\infty}^{ab} = \lambda(k_\infty/k)$, $\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}_2} \tilde{G}_{k'_\infty}^{ab} = \lambda(k'_\infty/k')$ だから, これと木田の公式を比較することによって k の満たすべき条件を絞り込む. 木田の公式は λ^-(λ の $(-)$-部分) についての情報しか与えないので, λ^+(λ の $(+)$-部分) に関する緻密な考察を必要とするが, その際に Greenberg 予想の研究で得られた結果が役立つ. さらに, 一般 Greenberg 予想に関する Minardi の結果 (上の注意 3 参照) も条件を絞るのに用いる.

$\Longleftarrow$ の部分は, Nguyen Quang Do [7] による CM-体 F について $\tilde{G}_{F_\infty}$ が自由になるための十分条件を与えた定理 (前述の Wingberg の定理とほぼ同様の結果であるが, $p=2$ の場合も含む) を用いて示される.

次の結果は, 虚二次体 k の判別式の素因数の性質から $\tilde{G}_{k_\infty}$ に入っている relation に関しての情報を与えてくれる：

定理 4. $k=\mathbb{Q}(\sqrt{-m})$ を虚二次体で, 2 は k で不分岐で $\lambda(k_\infty/k)\geq 2$ とする. そして, m が次の条件を満たす素因数 $p\equiv 1 \pmod 8$ を持つと仮定する:

$g\in\mathbb{Z}$ を mod p の原始根, $2^e \parallel p-1$, $z=g^{\frac{p-1}{2^e}}$ とするとき, $(\frac{z^5-1}{z-1})^{\frac{p-1}{2}}\not\equiv 1 \pmod p$.

このとき, $F_{\lambda(k_\infty/k)}$ を階数 $\lambda(k_\infty/k)$ の自由 pro-2 群とすれば,

$$\tilde{G}_{k_\infty}\simeq F_{\lambda(k_\infty/k)}/R,\ R\subseteq C_2(F_{\lambda(k_\infty/k)}),\ R\not\subseteq C_3(F_{\lambda(k_\infty/k)}).$$

定理 4 の証明も定理 3 と同じく, k_∞/k の岩澤加群と, k の不分岐 2 次拡大 k' 上の円分的 $\mathbb{Z}_2$-拡大の岩澤加群の構造を比べ, $\tilde{G}_{k_\infty}$ の relation を "あぶり出す" ことにより得られる.

この定理から次の 2 つの系が得られる：

系 1. $k=\mathbb{Q}(\sqrt{-m})$ は定理 4 と同様とする.
m が

$$p\equiv 9 \pmod{16},\ 2^{\frac{p-1}{4}}\equiv 1 \pmod p$$

もしくは

$$p\equiv 1 \pmod{16},\ 2^{\frac{p-1}{4}}\equiv -1 \pmod p$$

をみたす素因数 p を持つならば,

$$\tilde{G}_{k_\infty}\simeq F_{\lambda(k_\infty/k)}/R,\ R\subseteq C_2(F_{\lambda(k_\infty/k)}),\ R\not\subseteq C_3(F_{\lambda(k_\infty/k)}).$$

系 2. $k=\mathbb{Q}(\sqrt{-pq})$, p,q : 素数, $p\equiv 9 \pmod{16}$, $2^{\frac{p-1}{4}}\equiv 1 \pmod p$, $q\equiv 3 \pmod 8$ とすると,

$$\tilde{G}_{k_\infty}\simeq F_2/R,\ R\subseteq C_2(F_2),\ R\not\subseteq C_3(F_2).$$

従って,

$$\lambda^{(1)}(k_\infty/k)=2,\ \lambda^{(i)}(k_\infty/k)=0\ (i\geq 2).$$

注意 4. 定理 4, 及びその系の条件を満たす素数 p は無数に存在する.

本報告の最後に, $\mathbb{Z}_p$-拡大 K/k に対する $\tilde{G}_K$ の構造についての問題を 2 つ挙げる：

問題 1. K/k を $\mu(K/k)=0$ となる $\mathbb{Z}_p$-拡大, $\tilde{G}_K$ を K 上の最大不分岐 p-拡大のガロワ群とするとき, $\tilde{G}_K$ の relation rank ($=\dim_{\mathbb{F}_p} H_2(\tilde{G}_K,\mathbb{Z}/p)$) は常に有限か？ 或いは無限になりうるのか？

$$1 \longrightarrow R \longrightarrow F_d \longrightarrow \tilde{G}_K \longrightarrow 1$$

を階数dの自由pro-p-群F_dによる$\tilde{G}_K$の極小表現(dが最小)とするとき, $R = \langle g^{-1}t_i g | g \in F_d,\ 1 \le i \le r\rangle$となる, 有限個の$t_1, t_2, \ldots, t_r \in R$が存在するかという問題である. 有限次代数体$k$に対しては, $\tilde{G}_k$のrelation rankは有限であることが知られているのであるが, 少なくとも筆者はこの問題の解答を知らない.

例えば, 先に挙げた虚二次体$k = \mathbb{Q}(\sqrt{-m})$上の円分的$\mathbb{Z}_3$-拡大$k_\infty/k$の場合では, $\tilde{G}_{k_\infty}$が自由ならば, 勿論relation rank=0で有限である. $m = 2437, 3886, 4027$のときは$\tilde{G}_{k_\infty}$は自由ではなかったのでrelation rankは1以上である. しかし, これら3つのkに対しては$\tilde{G}_{k_\infty}$のrelation rankは有限であることが示せる.

この問題はK/kに付随するあるΛ-加群を用いて言い換えることができる. 完全可換図式(1)中の$\mathcal{H}_n^{(i)}$を用いて, $\mathcal{H} := \varprojlim_n \varprojlim_i \mathcal{H}_n^{(i)}$とおく. ここに, 内側の射影的極限は, 自然な写像$\mathcal{H}_n^{(i)} \longrightarrow \mathcal{H}_n^{(j)}$ $(i \ge j)$に関するもので, 外側の射影的極限はノルム写像$N_{m,n}$に関するものである. $\mathcal{H}$はΛ-加群で, Λ-加群として,

$$\mathcal{H} \simeq H_2(\tilde{G}_K, \mathbb{Z}_p) = R \cap [F_d, F_d]/[R, F_d]$$

となることが分かる(右辺にもΛが作用している). また,

$$0 \longrightarrow H_2(\tilde{G}_K, \mathbb{Z}_p)/p \longrightarrow H_2(\tilde{G}_K, \mathbb{Z}/p) \longrightarrow X_K[p] \longrightarrow 0$$

($X_K : K/k$の岩澤加群, $X_K[p] = \ker(X_K \xrightarrow{p} X_K)$)という完全系列が存在するので,

$$\tilde{G}_K \text{の relation rank が有限} \Longleftrightarrow \#(\mathcal{H}/p) < \infty$$

となる. $\mathcal{H}$が有限生成Λ-加群であることは岩澤理論から分かる. 従って問題は$\mathcal{H}$はtorsion Λ-加群で且つ$\mathcal{H}$のμ-不変量が0であるか, ということになる.

もう一つの問題は問題1に比べ, かなり漠然としたものである：

問題2. $\tilde{G}_K$を何らかのゼータ函数を通じて理解できないか?

例えば, Kが虚二次体上の円分的$\mathbb{Z}_p$-拡大の場合は, 岩澤理論により$\tilde{G}_K^{\mathrm{ab}}$の構造は久保田-Leopoldt p-進L-函数を通じて理解することができた(Mazur-Wilesの定理). この種の現象が$\tilde{G}_K$そのものについても起きているのであろうか, ということも問題として考えられる. 特に$\tilde{G}_K$が自由のときは, 高次岩澤加群$X^{(i)}$のΛ-加群構造は$\tilde{G}_K$の最大アーベル商, 即ち通常の岩澤加群のΛ-加群構造から完全に定まり, その構造は組み合わせ群論的な方法で久保田-Leopoldt p-進L-函数の零点で記述される. $X^{(1)}$に対するMazur-Wilesの定理のように, 高次岩澤加群$X^{(i)}$に直接対応すべき, 何らかのp-進L-函数が存在するかということは興味のある問題である.

参考文献

1. B. Ferrero and L. C. Washington, The Iwasawa invariant μ_p vanishes for abelian number fields, *Ann. of Math.* **109** (1979), 377–395.
2. R.Greenberg, Iwasawa theory –Past and present, *Class Field Theory–Its Centenary and Prospect, ASPM of Math. Soc. Japan* **30** (2001), 335–385.
3. Y.Ihara, Profinite braid groups, Galois representations and complex multiplications, *Ann. of Math.* **123** (1986), 43–106.
4. K.Iwasawa, On Γ-extensions of algebraic number fields, *Bull. Amer. Math. Soc.* **65** (1959), 183-226.
5. K.Iwasawa, On $\mathbf{Z}_l$-extensions of algebraic number fields, *Ann. of Math.* **98** (1973), 246–326.
6. J.Minardi, Iwasawa modules for $\mathbb{Z}_p^d$-extensions of algebraic number fields, Thesis (1986), University of Washington.
7. T.Nguyen Quang Do, K_3 et formules de Riemann-Hurwitz p-adiques, *K-Theory* **7** (1993), 429–441.
8. M.Ozaki, Iwasawa invariants of $\mathbb{Z}_p$-extensions over an imaginary quadratic field, *Class Field Theory–Its Centenary and Prospect, ASPM of Math. Soc. Japan* **30** (2001), 387–399.
9. M.Ozaki, Construction of $\mathbb{Z}_p$-extensions with prescribed Iwasawa modules, submitted
10. M.Ozaki, Non-abelian Iwasawa theory for $\mathbb{Z}_p$-extensions, in preparation
11. K.Wingberg, Ein Analogon zur Fundamentalgruppe einer Riemannschen Fläche im Zahlkörperfall, *Invent. Math.* **77** (1984), 557–584.
12. K.Wingberg, On the maximal unramified p-extension of an algebraic number field, *J. reine angew. Math.* **440** (1993), 129–156.

尾崎 学 (Manabu Ozaki)
島根大学 総合理工学部 数理・情報システム学科
〒690-8504 島根県松江市西川津町 1060
e-mail: `ozaki@math.shimane-u.ac.jp`